MP*4 Composition de Probabilités : Temps d'Arrêt, Motifs

10 février 2019

Préliminaire : Borel–Cantelli. Soit A_n une suite d'événements, la limite supérieure de la suite (A_n) est $\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{m\geq n} A_m)$.

Interprétation (très utile) : A est l'ensemble des ω qui appartiennent à A_n pour une infinité de n (IS).
Soit A_n une suite d'événements.
1) Montrer que : Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ alors
$P(\limsup A_n) = 0$.
(Ainsi, l'ensemble des ω qui appartiennent à A_n pour une infinité de n est négligeable ; ou encore : p.s. $\{n \mid \omega \in A_n\}$ est fini.)
2) Si les A_n sont indépendants et si $P(\limsup A_n) = 0$ prouver que
$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.
En déduire que, si les A_n sont indépendants et si $\sum P(A_n) = \infty$ alors
$P(\limsup A_n) = 1$.
(Ainsi, l'ensemble des ω qui appartiennent à A_n pour une infinité de n est presque sûr ; ou encore : p.s. $\{n \mid \omega \in A_n\}$ est infini.)

1 Temps d'arrêt

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans Z. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n la tribu engendré par les variable aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ c'est-à-dire les réunions d'ensembles de la forme $X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n$ où les i_k sont dans Z. Un *temps d'arrêt* — attaché à la suite X_n — est une variable aléatoires $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T = n)$ appartienne à U_n. Par exemple, toute variable p.s. constante est un temps d'arrêt.

1.1

a) Montrer que T est un temps d'arrêt ssi :
1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T > n)$ est dans U_n ;
ou encore ssi :
2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T \leq n)$ est dans U_n.

b) Soient E une partie de N, et $\mathcal{E}(E) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n \in E\}$. Vérifier que le *temps d'entrée* $T_E = \min \mathcal{E}(E)$ est un temps d'arrêt, et qu'il est presque partout fini dès que les X_n sont IID et que $P(X_1 \in E)$ est strictement positive.

c) Si T et T' sont deux temps d'arrêt, vérifier qu'il en est de même de $\min(T, T') = T \wedge T'$ et $\max(T, T') = T \vee T'$. En particulier, pour tout entier N fixé, $T \wedge N$ est un temps d'arrêt.

1.2

On suppose dans cette question que T est un temps d'arrêt pour X_n, $n \geq 1$ et qu'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0, 1[$ tels que pour tout $n \geq 1$ et tout $A \in U_n$ on ait

$$P(T \leq n + k \mid A) > \varepsilon.$$

Montrer que

$$P(T > n + k \mid T > n) \leq 1 - \varepsilon$$

puis que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$P(T > km) \leq (1 - \varepsilon)^m$$

et en déduire que T est d'espérance finie.

Notations : dans toute la suite, on fixe un ensemble fini non vide $\mathcal{A}$.

2 Motifs pour une suite de Bernoulli

Soit u_n une suite de nombres réels. On rappelle que la limite supérieure de u_n, notée $\text{limsup}_{n \to +\infty} u_n$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de u_n dans $\overline{\mathbb{R}}$, et sa limite inférieure, notée $\text{liminf}_{n \to +\infty} u_n$, sa plus petite valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Dans cette partie seulement, on suppose que $\mathcal{A} = \{\mathcal{P}, \mathcal{F}\}$ et que X_n est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes à valeurs dans $\mathcal{A}$ de paramètre $p \in]0, 1[$ avec $P(X_n = \mathcal{P}) = p$. Lorsque n est donné dans $\mathbb{N}^*$, On note L_n le maximum, dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, de

$$\{l \in \mathbb{N}^* \mid X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+l-1} = \mathcal{P}\}.$$

avec la convention $\max \emptyset = 0$.

2.1

Montrer que L_n est une variable aléatoires presque partout finie. Donner son espérance et sa variance.

2.2

Montrer que, presque sûrement, $\text{liminf}_{n \to +\infty} \frac{L_n}{\ln n} = 0$

2.3

Soit $\beta > \frac{1}{\ln(1/p)}$, et $A_n = (L_n > \beta \ln n)$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty.$$

En déduire que, presque sûrement, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{L_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln(1/p)}$.

2.4

Soit l_n une suite d'entiers strictement positifs tels que, pour tout n assez grand, $l_n = [\frac{\ln n}{\ln(1/p)}]$ ([,] désigne la partie entière). On définit la suite n_k par

$$n_0 = 0,\ \forall k \in \mathrm{N},\ n_{k+1} = n_k + l_{n_k}.$$

a) Montrer que $\ln\ln n_{k+1} - \ln\ln n_k = O(\frac{1}{n_k})$ et en déduire que $\sum \frac{1}{n_k}$ diverge.

b) On pose $A_k = \{X_{n_k} = \ldots = X_{n_k+l_{n_k}-1} = \mathcal{P}\}$. Montrer que les A_n sont mutuellement indépendants et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = +\infty.$$

c) Déduire de tout cela que, presque sûrement, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{L_n}{\ln n} = \frac{1}{\ln(1/p)}$.

3 Le problème de Borel

Soient r un entier ≥ 2 et un élément $a = (a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathcal{A}^r$. Soit (X_n), $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathcal{A}$, identiquement distribuées avec $P(X_1 = a_i) = p_i > 0, i = 1, \ldots, r$. On pose enfin

$$T_a = \min\{n \geq r \mid ((X_{n-r+1}, \ldots, X_n) = a)\}.$$

3.1

a) Soit $j \in \mathrm{N}*$. Calculer la probabilité de $((X_{j-r+1}, \ldots, X_j) = a)$.
b) Montrer que T_a est un temps d'arrêt pour la suite (X_n).
c) Montrer que que T_a est presque partout fini.

3.2

On note R l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ tels que

$$(a_{i+1}, \ldots, a_r) = (a_1, \ldots, a_{r-i}).$$

Posons, pour $i \in \mathrm{N}$, $A_{i,n} = ((X_{n-r+1}, \ldots, X_n) = a), T_a = n - i)$.

a) Vérifier l'égalité

$$(T_a = n) = ((X_{n-r+1}, \dots, X_n) = a), T_a > n - r) \setminus (A_{1,n} \cup \dots \cup A_{r-1,n}).$$

b) Montrer soigneusement que

$$\forall n \geq r,\ P(T_a = n) = \prod_{j=1}^{r} p_j \times P(T_a > n - r) - \sum_{i \in R} \prod_{j=r-i+1}^{r} p_j \times P(T_a = n - i).$$

3.3

En déduire que l'espérance de T_a est

$$\frac{1}{p_1 \dots p_r} + \sum_{i \in R} \frac{1}{\prod_{j=1}^{r-i} p_j}.$$

3.4 ABRACADABRA

On choisit dans cette question pour $\mathcal{A}$ l'alphabet usuel écrit en majuscules, les lettres étant équiprobables, et pour séquence de lettres $a = ABRACADABRA$. Donner $E(T_a)$. Calculer de même l'espérance pour $a = ABRACADABRI$ et expliquer les différences obtenues.

3.5

a) Soit $\sum u_n$ un série positive de somme 1, et soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Donner pour $t \in [0, 1[$, une identité entre $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n t^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

b) Prouver que la fonction génératrice de G de T_a est donnée pour $t \in [0, 1]$

$$G_a(t) = \frac{(\prod_{i=1}^{r} p_i) t^r}{(\prod_{i=1}^{r} p_i) t^r + (1 - t)(1 + \sum_{i \in R} (\prod_{j=r-i+1}^{r} p_j) t^i)}.$$

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $P(T_a = n) = O(\alpha^n)$.
d) (Pour départager les ex-aequo). Déterminer la variance de T_a.

4 Espérance et suites de fonctions

4.1

Soit X une variable aléatoire discréte sommable. On note $(a_n)_{n\in D}$ la suite injective des valeurs prises par X avec une probabilité > 0.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, pour toute événement A,

$$P(A) \leq \delta \Rightarrow E(|X1_A|) \leq \varepsilon.$$

b) Soit $\{B_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ une partition de Ω. Montrer que, correctement

$$E(X) = \sum_{n\in \mathbb{N}} E(X1_{B_n}).$$

4.2 Convergence dominée

Soit X_n une suite de variable aléatoires : $\Omega \to \mathbb{Z}$, dont la limite est une variable aléatoires X. On suppose qu'il existe une variable aléatoires Z d'espérance finie telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leq Z$. Montrer que les X_n ainsi que X sont d'espérances finies et que $E(X_n) \to E(X)$.

4.3 Convergence monotone

Soit Y_n une suite de variable aléatoires : $\Omega \to \mathbb{N}$, croissante et dont la limite est une variable aléatoires Y. Montrer que $\sup_{n\geq 0} E(Y_n) < +\infty \iff E(Y) < +\infty$ et que dans ce cas $E(Y_n)$ converge vers $E(Y)$.

5 Waald's Formulas

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires IID d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

5.1

a) Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de la suite X_n et d'espérance finie ; soit aussi $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$. Montrer que S est une variable aléatoire, donner sa fonction génératrice en fnction de celle de X_1 prouver que $E(S) = E(N)E(X_1)$.

b) On suppose que toutes les X_n ainsi que N ont un moment d'ordre deux et que $E(X_1) = 0$. Montrer qu'il en va de même de S et calculer la variance de S en fonction de X_1 et N.

5.2

Soient T un temps d'arrêt d'espérance finie. On note S_T la variable aléatoires définie par $S_T(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

a) Montrer que S_T est bien définie.

b) On suppose les X_n positives. Montrer que $E(S_T) = \sum_{m=1}^{\infty} E(X_m 1_{T \geq m})$ et en déduire $E(S_T) = E(X_1)E(T)$.

c) Prouver la formule dans le cas général.

d) On suppose que toutes les X_n ont une variance finie σ^2 et que $E(X_1) = 0$. Montrer qu'il en va de même de S_T et montrer que la variance de S_T vaut $\sigma^2 E(T)$. On pourra procéder comme suit :

i) Montrer que $E(S^2_{T\wedge n}) = E(S^2_{T\wedge n-1}) + \sigma^2 P(T \geq n)$;

ii) Conclure.

5.3

Soit X_n la marche aléatoire équilibrée sur **Z**, $a < 0 < b$ deux entiers, T le temps d'entrée dans la complémentaire de $[a, b]$.

a) Montrer que $P(S_T = b) = \frac{-a}{b-a}$ et $P(S_T = a) = \frac{b}{b-a}$.

b) On note $T_a = \inf\{n : S_n = a\}$. Calculer $P(T_a < T_b)$ et en déduire que, pour tout $x \in \mathbf{Z}$, T_x est p.s. fini et d'espérance infinie.

TEMPS D'ARRÊT

I - 1) i) Si T est un temps d'arrêt, $(T \leq n)$ qui est la réunion disjointe de $(T=1)$, ..., $(T=n)$, est dans $\mathcal{F}_n$. Il en va donc de même de son complémentaire $(T > n)$.

Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T > n) \in \mathcal{F}_n$ il vient $(T = 1) = \Omega \setminus (T > 1) \in \mathcal{F}_1$ et, pour $n \geq 2$, $(T = n) = (T > n-1) \setminus (T > n) \in \mathcal{F}_n$, d'où le résultat.

(ii) La nécessité de la condition est déjà vue, son caractère suffisant vient de $(T = 1) = (T \leq 1)$ et $(T = n) = (T \leq n) \setminus (T \leq n-1)$ pour $n \geq 2$. On peut aussi observer que $(T \leq n) = (T > n)^c$ et appliquer i).

b) • Si E est vide, $T_E = +\infty$ est bien un temps d'arrêt.
≥ 1 : $(T = n)$ signifie : $X_1 \notin E, \ldots, X_{n-1} \notin E, X_n \in E$, qui est bien un événement de $\mathcal{F}_n$.

•• Supposons ici $P(X_1 \in E) = \varepsilon > 0$; on a donc (X_n) étant IID : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n \in E) = \varepsilon > 0$. De là :
$$P(T > n) = P(X_1 \notin E, \ldots, X_n \notin E) \underset{\text{indépendance}}{=} (1-\varepsilon)^n. \text{ De là}$$
$$P(T = +\infty) \underset{\text{décroissance}}{=} \lim_{n \to +\infty} P(T > n) = 0.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :
$$(\min(T, T') > n) = (T > n) \cap (T' > n) \in \mathcal{F}_n$$
$$(\max(T, T') \leq n) = (T \leq n) \cap (T' \leq n) \in \mathcal{F}_n$$
d'après a), T et T' sont deux temps d'arrêt. $\square$

TA (2)

I - 2 - a). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait avec I.1) que $(T > n) \in \mathcal{U}_m$, donc : $P(T \leq m+k \mid T > m) \geq \varepsilon$

par complémentarité : $P(T > m+k \mid T > m) \leq 1 - \varepsilon$

- Avec $A = \Omega$, $P(T \leq k) \geq \varepsilon$ donc $P(T > k) \leq 1 - \varepsilon$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, si $P(T > km) \leq (1-\varepsilon)^m$ il vient avec ce qui précède : $P(T > k(m+1) \mid T > km) \leq 1 - \varepsilon$

et donc : $P(T > k(m+1)) \leq (1-\varepsilon)^{m+1}$.

- Par inclusion : $P(T > km + r) \leq (1-\varepsilon)^m$, $r = 0, \dots, m-1$

il en résulte que la série (famille..)

$$\sum_{r=0,\dots,m-1} \left(\sum_{m \geq 1} P(T > km + r) \right)$$

est sommable, donc que $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(T > n)$ converge, ce qui montre $E(T) < +\infty$.

II - 1) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, il vient par indépendance des X_n : $P(L_n = \ell + 1) = P(X_n = \dots = X_{n+\ell} = P \wedge X_{n+\ell+1} = F)$

$$= p^{\ell+1}(1-p)$$

(loi géométrique " de premier échec ")

avec la particularité $P(L_n = 0) = 1 - p$, $P(L_n = 1) = p(1-p)$.

Sa série génératrice est donc donnée par

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k (1-p) s^k = \frac{1-p}{1-ps} \quad \left(\begin{array}{c} \text{Preuve :} \\ G(1) = 1 \end{array} \right)$$

ce qui donne immédiatement son espérance :

$G'(1) = \frac{p}{1-p}$ et sa variance : $V = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$

$$= \frac{2p^2(1-p)}{(1-p)^3} + \frac{p}{1-p} - \frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{2p^2 + p(1-p) - p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2}$$

2) Soit $A_n = (L_{2n} = 2) = (X_{2n} = X_{2n+1} = P)$

Les A_n sont 2 à 2 indépendants car la suite (X_n) ... $P(A_n) = p^2 > 0$.

De là, il résulte que $\sum P(A_n)$ diverge, avec les (A_n) indépendants ; Borel-Cantelli II dit que :
$\{\omega \mid L_{2^n}(\omega) = 2 \text{ I.S.}\}$ est presque sûr, donc :
$\liminf \frac{L_n}{\log n} = 0$ p.s □

3) $L_n \geq \beta \log n$ signifie que : $X_n = \dots = X_{n+l-1} = \beta$
avec $l \geq \beta \log n$, donc $P(L_n \geq \beta \log n) \leq p^{\beta \log n}$
Or : $p^{\beta \log n} = n^{\beta \log p} = \frac{1}{n^{(-\beta \log p)}}$ avec $-\beta \log p > 1$
par hypothèse, donc : $\sum P(L_n \geq \beta \log n)$ converge.

Borel-Cantelli nous dit que $(L_n \geq \beta \log n \text{ I.S})$ est de mesure nulle, donc que $(\limsup \frac{L_n}{\log n} > \beta)$ est négligeable.
Enfin $\left(\limsup \frac{L_n}{\log n} > \frac{1}{\log \frac{1}{p}}\right) = \bigcup_{\substack{\beta \text{ rationnel} \\ \beta > -\frac{1}{\log p}}} \left(\limsup \frac{L_n}{\log n} > \beta\right)$
apparaît comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables, donc est négligeable □

4) a) $A_k = \{X_{n_k} = \dots = X_{n_k + l_{n_k} - 1} = \beta\}$ est visiblement indépendant de $\{X_{n_{k+1}} = \dots = X_{n_{k+1} + l_{n_{k+1}} - 1} = \beta\}$ puisque la suite X_n est formée de VAI.

b) On a : $\frac{n_{k+1}}{n_k} = 1 + \frac{l_{n_k}}{n_k}$ donc
$\log n_{k+1} - \log n_k \leq \frac{l_{n_k}}{n_k}$, de ce fait
$\frac{\log n_{k+1}}{\log n_k} \leq 1 + \frac{l_{n_k}}{n_k \log n_k}$
$\log\log n_{k+1} - \log\log n_k \leq \frac{l_{n_k}}{n_k \log n_k}$ avec $\frac{l_{n_k}}{\log n_k} \leq C^{ste}$ (hyp.)
donc $\log\log n_{k+1} - \log\log n_k = O\left(\frac{1}{n_k}\right)$.

Si $\sum \frac{1}{n_k}$ converge, $\log\log n_{k_n}$ est borné ce qui est absurde ($l_n \geq 1$). Donc $\sum \frac{1}{n_k}$ diverge $\square$

c) $P(A_k) = p^{l_{n_k}} = \exp\left(\log p \left[-\frac{\log n_k}{\log p}\right]\right)$

$$\geq \exp\left(\log p \times -\frac{\log n_k}{\log p}\right) = \frac{1}{n_k}$$

donc $\sum P(A_k) = +\infty$.

Or $A_k \subset (L_{n_k} \geq l_{n_k})$; comme Borel-Cantelli dit que $(\omega \in A_k \text{ I.S.})$ est presque sûr, l'événement $(\omega \in (L_{n_k} \geq l_{n_k}) \text{ I.S.})$ aussi, mais

$$\underset{\text{I.S.}}{L_{n_k} \geq l_{n_k}} \Rightarrow \frac{L_{n_k}}{\log n_k} \geq \underbrace{\frac{l_{n_k}}{\log n_k}}_{\text{ceci tend vers } -\frac{1}{\log p}} \text{ I.S.}$$

et donc : $\left(L_{n_k} \geq l_{n_k} \text{ I.S.}\right) \Rightarrow \limsup \frac{L_n}{\log n} \geq -\frac{1}{\log p}$

Bilan : $\limsup \frac{L_n}{\log n} = -\frac{1}{\log p}$ p.s. $\square$

III Le problème de Borel :

3-1 a) Les variables X_k sont indépendantes donc

$$P(X_{n-r+1} = a_1, \dots, X_n = a_r) = \prod_{k=1}^{r} p_k$$

b) $(T_a = n)$ signifie : $X_{n-r+1} = a_1, \dots, X_n = a_r$

et $(X_{i-r+1}, \dots, X_i) \neq (a_1, \dots, a_r)$ pour $i < n$.

C'est donc un événement de la tribu attachée

à $X_1, \dots, X_n$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $Y_k = (X_{kr+1}, \dots, X_{(k+1)r})$

Les variables Y_k sont indépendantes, identiquement distribuées et $P(Y_1 = a) = \prod_{i=1}^{r} p_i > 0$.

De plus, $T'_a = \min\{k \geq 0 \mid Y_k = a\}$ est un temps d'arrêt pour Y_k. Avec I-2, T'_a est p.s. fini, a fortiori T_a est p.s. fini.

3-2) a) Dire que $T_a = n$, c'est exprimer : $T_a > n-r$ (clair) et $(X_{n-r+1}, \dots, X_n) = a$, et $(X_{n-i-r+1}, \dots, X_{n-i}) \neq a$ pour $1 \leq i \leq n-$

On retire donc à $(X_{n-r+1} = a_1, \dots, X_n = a_r)$ $T_a > n-r$ les événements $(X_{n-i+r+1} = a_1, \dots, X_{n-i} = a_r)$, $T_a = n-i$ tant que cela a un sens, c'est-à-dire tant que $n-i \geq n-r-1$ d'où $i \leq r-1$.

3-3-b) Reprenons la décomposition de $T_a = n$:

$$(T_a = n) = ((X_{n-r+1} = a_1, \dots, X_n = a_r), T_a > n-r) \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} A_{i,n}$$

où : | $A_{i,n} \subset (X_{n-r+1}, \dots, X_n) = a$
| les $A_{i,n}$ sont disjoints

De là : $P(T_a = n) = P((X_{n-r+1}, \dots, X_n) = a, T_a > n-r)$

$$- \sum_{i=1}^{r-1} P(T_a = n-i, (X_{n-r+1}, \dots, X_n) = a)$$

Avec les notations du I : Notons $X = (X_{n-r+1}, \dots, X_n)$.

- $(T_a > n-r) \in \mathcal{U}_{n-r}$, donc cet événement est indépendant de $(X = a)$ qui ne dépend que de $(X_{n-r+1}, \dots, X_n)$ et

$$P(X = a \wedge T_a > n-r) = P(X=a)\,P(T_a > n-r).$$

- On regarde ensuite $A_{i,n}$:

$(X = a \wedge T_a = n-i)$ signifie, (entre autres) $\begin{cases} X_{n-r+1} = a_1, \dots, X_n = a_r \\ X_{n-i-r+1} = a_1, \dots, X_{n-i} = a_r \end{cases}$

De là : $(a_1, \dots, a_{r-i}) = (a_{i+1}, \dots, a_r)$ (Comptez !) et $i \in R$.

De plus, $(T_a = n-i)$ est indépendant de l'événement ultérieur : $X_{n-i+1} = a_{r-(i-1)} = a_{r-i+1}, \dots, X_n = a_r$

donc $P(A_{i,n}) = P(T_a = n-i)\, p_{r-i+1} \times \dots \times p_r$

Bilan : $P(T_a = n) = \prod_{j=1}^{r} p_j \cdot P(T_a > n-r) - \sum_{i \in R} \prod_{j=r-i+1}^{r} p_j \cdot P(T_a = n-i)$

<u>3.3</u> $P(T_a = k) = 0$ si $k < r$. On somme l'inégalité précédente pour $n \geq r$, tenant compte de :

$\sum_{n \geq r} P(T_a > n-r) = E(T_a)$ $\Big\{$ Savoir le faire / HP

$\sum_{n \geq r} P(T_a = n) = 1$ car T_a est p.s. finie.

Si $i \in R$, $P(T_a = n-i)$ est sommée sur $\mathbb{N}$ et vaut 1.

Il en résulte :

$$1 = E(T_a) \prod_{j=1}^{r} p_j - \sum_{i \in R} \prod_{j=r-i+1}^{r} p_j$$

d'où l'égalité souhaitée !!

III - 4) ABRACADABRA possède 11 lettres de probabilité d'apparition $\frac{1}{26}$. L'ensemble R est $\{10, 7\}$, et $\prod_{j=r-i+1}^{r} p_j = \left(\frac{1}{26}\right)^i$, ainsi :

$$E(T_a) = 26^{11} + 26^4 + 26$$

Avec a = ABRACADABRI, $E(T_a) = 26^{11}$ car $R = \emptyset$.

Ceci se voit bien avec la démonstration du III - 3, : si on espère ABRACADABRA et que l'on a ABRACADABRI on est ramené au départ ; si c'est l'inverse on dispose déjà de ABRA (fin du mot) : la situation est plus favorable.

III - 5) a) Pour $t \in [0, 1[$, le produit de Cauchy de deux séries ACV donne :

$$\frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_0 + \dots + u_n) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - R_n) t^n$$

De là : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n t^n = \frac{1 - \sum u_n t^n}{1-t}$

b) Prenons $u_n = P(T_a = n)$, $R_n = P(T_a > n)$, soit $t \in [0, 1[$, multiplions la relation de III - 3 par t^n et sommons, il vient :

$$G_T(t) = \prod_{j=1}^{r} p_j \cdot \frac{(1 - G_T(t))}{(1-t)} t^r - \sum_{i \in R} \left(\prod_{r-i+1}^{r} p_j\right) t^i G_T(t)$$

On multiplie par $1-t$, passe tout ce qui concerne G_T dans le membre de gauche : la relation vient.

c) i) $G_T(z) = \sum P(T_a = n) z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, 1)$, et y est bornée.

ii) Pour $t \in D(0, 1)$, la relation prouvée en b) reste valide par produit de Cauchy ACV.

Ainsi, $G_T(z)$ est une fraction rationnelle TA - 8

bornée sur $D(0,1)$. Tous ses pôles sont donc

de module > 1 (sinon...), ainsi pour $t \in [0,1[$

$$G_T(t) = \underbrace{F(t)}_{\text{polynôme}} + \sum_{\substack{z_i \text{ pôle de } G \\ k \leq r}} \frac{\lambda_{i,k}}{(z_i - t)^k} \quad (*)$$

avec $$\frac{1}{(z_i - t)^k} = \frac{(-1)^k}{z_i^k} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{t}{z_i}\right)^n \text{ (Cours)}$$

Soit α réel tq : $1 < \alpha < \min \left|\frac{1}{z_i}\right|$ (cf. ci-dessus)

il est clair que les coefficients de la FSE

$(*)$ sont des $O(\alpha^n)$, par unicité du DSE :

$$P(T_a = n) \underset{n \to +\infty}{=} O(\alpha^n)$$

d) Parfois, la fuite est la seule issue

$\square$